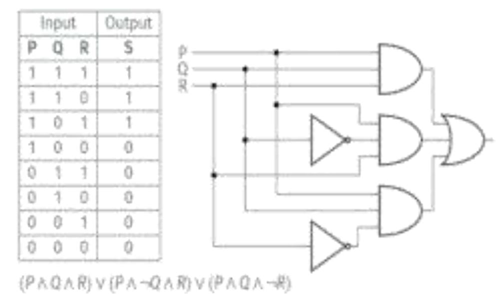
University of BOUIRA
Faculty of sciences
Department of Informatics

Module **Logique Mathematique** 2ème Année Licence

Cours 3

Logique des propositions



P	Q	R	S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

les bases (2)

BY : BENAISSI Sellami

s.benaissi@gmail.com

OCT 2022

PLAN

Part 1

Rappelle

RAPPELLE

Definition

Soit $\mathcal{L}_p(\neg, \wedge)$ un langage propositionnel

Définir un langage revient à définir :

- Des symboles (alphabet)
- Des expressions (formules)

Calcul propositionnel

L'alphabet

L'alphabet de $\mathcal{L}_p(\neg,\wedge)$ se compose de trois classes de symboles:

- Les symboles des variables propositionnelles lettres majuscules avec ou sans indices : (B, C, A_1, A_2)
- Les symboles logiques ou connecteurs : $\neg \vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow$
- Les symboles impropres : (et)

Les formules

L'ensemble des formules de $\mathcal{L}_p(\neg,\wedge)$ est défini inductivement de la manière suivante:

- Toute variable propositionnelle est une formule **atomique** (simple)
- Si α et β sont deux formules alors $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$ sont des formules composées
- Les **lettres grecques** sont utilisées pour représenter les noms des **formules**

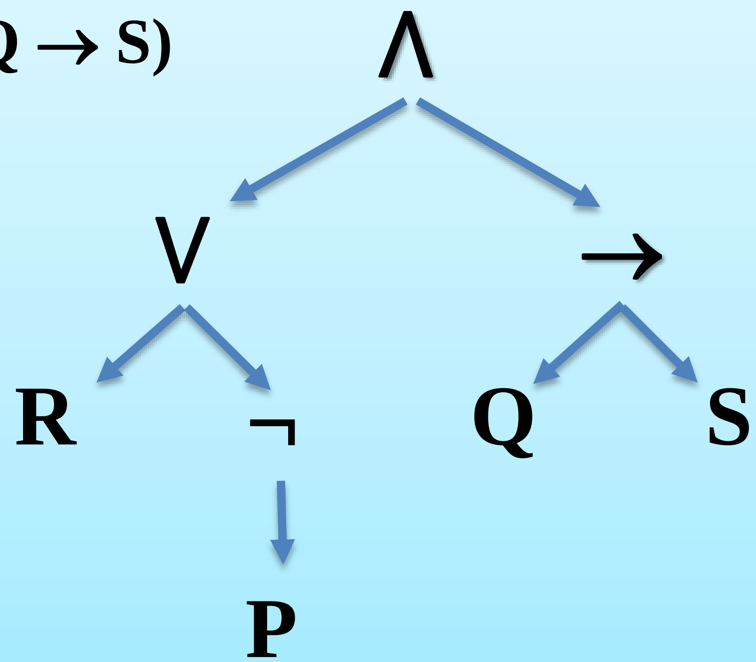
Remarque

Le connecteur $\wedge$ est **binaire** et le connecteur $\neg$ est **unaire**

Arbre syntaxique (Arbre de décomposition) d'une formule

On peut représenter une formule sous forme d'un **arbre**. Cela permet de bien lire la formule.

Exemple : R ⋁ ¬P ⋀ (Q → S)



Notation préfixée (polonaise) d'une formule

- La notation polonaise se déduit en parcourant l'arbre de décomposition comme suit :

Racine, Branche gauche, Branche droite

Exemple 1 :

La notation polonaise de la formule:

$$\neg ((P \lor Q) \rightarrow P) \land (Q \rightarrow R)$$

est

Notation polonaise : $\land \neg \rightarrow \lor P\, Q\, P \rightarrow Q\, R$

Calcul propositionnel

La longueur d'une formule est le **nombre de symboles** de l'alphabet qu'elle contient

La profondeur d'une formule correspond à son arbre de décomposition C'est le **nombre de branche** qui sépare **la racine** (Niveau 0) de la branche la **plus éloignée**

La complexité d'une formule est le **nombre de connecteurs** qu'elle contient.

Une **substitution** associe à une variable propositionnelle **P** une formule α Elle est notée **$[\alpha/P]$.**

L'application de **$[\alpha/P]$** à une formule f (notée f **$[\alpha/P]$**) est le résultat de remplacement simultané de toutes les occurrences de **P** dans f par α**.**

Définition.

interprétation d'une formule de $\mathcal{L}_p$: attribution d'une valeur de vérité {V, F} à cette formule .

Part 2

formules particulières

Formule satisfiable

1 Formule satisfiable

Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite **satisfiable** ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$, il existe **au moins une** ligne dans sa table de vérité où la valeur de vérité est **vraie**

Formule satisfiable

1 Formule satisfiable

Exemple 1 :

$\alpha : P \vee Q \rightarrow P \wedge Q$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q \rightarrow P \wedge Q$
V	V	V	V	**V**
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	**V**

α est satisfiable

Formule satisfiable

1 Formule satisfiable

Exemple 2 :

α: P $\wedge \neg$P

P	$\neg$P	P $\wedge \neg$ P
V	F	**F**
F	V	**F**

α est insatisfiable

Ensemble satisfiable

2 Ensemble satisfiable

Un ensemble de formules T = {$\boldsymbol{\alpha 1}$, $\boldsymbol{\alpha 2}$,.., $\boldsymbol{\alpha n}$} est dit **satisfiable** ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha 1}$, $\boldsymbol{\alpha 2}$,.., $\boldsymbol{\alpha n}$, il existe **au moins une** ligne où $\boldsymbol{\alpha 1}$, $\boldsymbol{\alpha 2}$,.., $\boldsymbol{\alpha n}$ sont **vraies simultanément**

Ensemble satisfiable

2 Ensemble satisfiable

Exemple 1 :

$T = \{ P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q \}$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

T est satisfiable

Ensemble satisfiable

2 **Ensemble satisfiable**

Exemple 2 :

$T = \{ \neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q \}$

P	Q	¬P	P ∨ Q	P ∧ Q	P → Q	P ↔ Q
V	V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

T est insatisfiable

3 Tautologie

Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite **Tautologie** (formule valide) ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ est **vraie** sur toutes les lignes.

(On note : $\models \alpha$)

En d'autres termes, dans la table de vérité il n'y a que la valeur **vrai** comme résultat.

Formule satisfiable

3 Tautologie

Exemple 1 :

$\alpha : P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	F	**V**

α est une tautologie

Ensemble satisfiable

3 Tautologie

Exemple 2 :

$\alpha : P \vee Q \rightarrow P \wedge Q$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q \rightarrow P \wedge Q$
V	V	V	V	**V**
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	**V**

α n'est pas une tautologie

Antilogie

4 Antilogie

Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite **Antilogie** (anti-tautologie, formule insatisfiable) ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ est fausse sur toutes les lignes

En d'autres termes, dans la table de vérité il n'y a que la valeur **Faux** comme résultat.

Antilogie

4 Antilogie

Exemple 2 :

α: P $\land \neg$P

P	$\neg$P	P $\land \neg$ P
V	F	F
F	V	F

α est une antilogie

4 Tautologie / Antilogie

Remarques:

Si α et β sont deux formules alors:

- $\models \alpha \quad \Leftrightarrow$ toutes les valuations satisfont α.
- $\models \neg\alpha \quad \Leftrightarrow$ aucune valuation ne satisfait α, α est une **antilogie**.
- $\not\models \alpha \quad \Leftrightarrow$ α n'est pas une tautologie (il existe au moins une valuation qui ne satisfait pas α.
- $\not\models \alpha$ (non tautologie) $\not\Rightarrow$ antilogie
- $\models (\alpha \wedge \beta) \quad \Rightarrow \quad \models \alpha$ et $\models \beta$
- $(\models (\alpha \rightarrow \beta)$ et $\models \alpha) \quad \Rightarrow \quad \models \beta$
- $\models (\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow$ (pour chaque instanciation si α=v alors β=v)
- $\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow$ (pour chaque instanciation α et β ont les mêmes valeurs de vérité)

Exercice :

Donner la nature (tautologie, antilogie, autre) de :

α: $P \wedge \neg P$

β: $P \vee \neg P$

Conséquence logique

5 Conséquence logique

Une formule $\boldsymbol{\beta}$ est dite **conséquence logique** de $\boldsymbol{\alpha}$ ssi : Etant donné les tables de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta}$ **est vraie** sur toutes les lignes où $\boldsymbol{\alpha}$ **est vraie**

(on note $\boldsymbol{\alpha} \models \boldsymbol{\beta}$)

5 Conséquence logique

Exemple 1 :

$P \vee Q \models P \wedge Q$? NON

$P \wedge Q \models P \vee Q$? OUI

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Conséquence logique

6 Conséquence logique d'un ensemble de formules

Une formule $\boldsymbol{\beta}$ est dite **conséquence logique d'un ensemble** de formule T ={$\boldsymbol{\alpha 1}$, $\boldsymbol{\alpha 2}$,.., $\boldsymbol{\alpha n}$} ssi : Etant donné les tables de vérité de T, $\boldsymbol{\beta}$ est vraie sur toutes les lignes où T est vraie (les formules $\boldsymbol{\alpha 1}$,$\boldsymbol{\alpha 2}$,..,$\boldsymbol{\alpha n}$ sont vraies simultanément)

(on note $\{\boldsymbol{\alpha 1}, \boldsymbol{\alpha 2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha n}\} \models \boldsymbol{\beta}$)

6 Conséquence logique d'un ensemble de formules

Exemple :

$\{ P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q \} \models P$? OUI

$\{ P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q \} \models \neg P$? NON

P	Q	¬P	P ∨ Q	P ∧ Q	P → Q	P ↔ Q
V	V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Equivalence logique

7 Equivalence logique

Deux formules $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ sont **équivalentes** si elles ont les **mêmes** **valeurs** dans toutes les interprétations.

(on note $\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\beta}$)

Equivalence logique

7 Equivalence logique

Exemple :

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \to P$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V

7 Equivalence logique

Exercice :

Mohamed demande à **Ali** et **Salah** de deviner quelle est la couleur de la boule qu'il tient dans sa main,

- **Ali répond** : «**si** elle est noire **ou** si elle est blanche, **alors** elle est noire»
- **Salah répond** : «**si** elle **n'**est **pas** noire, **alors** soit elle **n'**est **pas** blanche soit elle **est** noire»

1. Montrer que Ali et Salah disent la même chose **?**
2. Sachant que Ali et Salah disent tous les deux la vérité (la boule est soit noire soit blanche), Quelle est la couleur de la boule **?**

7 Equivalence logique

Exercice (Solution) :

Mohamed demande à **Ali** et **Salah** de deviner quelle est la couleur de la boule qu'il tient dans sa main,

P : elle est noire	**Q** : elle est blanche

- **Ali répond** :

«si elle est noire ou si elle est blanche, alors elle est noire» $\equiv P \vee Q \rightarrow P$

- **Salah répond** :

«si elle n'est pas noire, alors soit elle n'est pas blanche soit elle est noire»

$\equiv \neg P \rightarrow \neg Q \vee P$

7 Equivalence logique

Exercice (Solution) :

1. Montrer que Ali et Salah disent la même chose **?**

Ali répond : $P \vee Q \rightarrow P$

➢ **Salah répond** : $\neg P \rightarrow \neg Q \vee P$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	$P \vee Q \rightarrow P$	$\neg Q \vee P$	$\neg P \rightarrow \neg Q \vee P$
V	V	F	F	V	**V**	V	**V**
V	F	F	V	V	**V**	V	**V**
F	V	V	F	V	**F**	F	**F**
F	F	V	V	F	**V**	V	**V**

7 Equivalence logique

Exercice (Solution) :

1. Sachant que Ali et Salah disent tous les deux la vérité (la boule est soit noire soit blanche), Quelle est la couleur de la boule ?

Ali répond : $P \vee Q \rightarrow P$

➢ **Salah répond** : $\neg P \rightarrow \neg Q \vee P$

$P \vee Q \rightarrow P \equiv \neg P \rightarrow \neg Q \vee P$

$P \vee Q \rightarrow P \equiv \neg(P \vee Q) \vee P \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee P \equiv (\neg P \vee P) \wedge (\neg Q \vee P) \equiv \neg Q \vee P$ .... ①

$\neg P \rightarrow \neg Q \vee P \equiv P \vee (\neg Q \vee P) \equiv P \vee P \vee \neg Q \equiv P \vee \neg Q \equiv \neg Q \vee P$ .... ②

A partir de ① et ② : La boule est noire

Modèle d'une formule

8 Modèle d'une formule propositionnelle

Un modèle d'une formule propositionnelle f est une valuation V tel que **V[f] = Vrai**

Modèle d'une formule

8 Modèle d'une formule propositionnelle

Exemple 1 :

La formule f a deux modèles : $f = (P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$

M1 : V(P) = Vrai, V(Q) = Vrai

M2 : V(P) = Faux, V(Q) = Faux

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$
V	**V**	V	V	**V**
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	**F**	F	F	**V**

Modèle d'un ensemble

9 Modèle d'un ensemble de formules

Un modèle d un ensemble T de formules propositionnelles est une valuation V qui satisfait toutes les formules de T.

V est un modèle de **T** $\rightarrow$ **$\forall f \in$T, V[f] = Vrai**

Modèle d'une formule

9 Modèle d'un ensemble de formules

Exemple 1 :

L'ensemble T a un seul modèle : $T = \{P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q\}$

M1 : V(P) = Vrai, V(Q) = Vrai

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Compatibilité

9 Compatibilité

- Une formule propositionnelle est dite **compatible** SSI elle a au moins un modèle.
- Un ensemble de formules propositionnelles est dit compatible SSI il a au moins un modèle.
- Une formule/Un ensemble satisfiable a au moins un modèle.
- Une formule/Un ensemble non satisfiable n a aucun modèle Incompatible.

Thank you